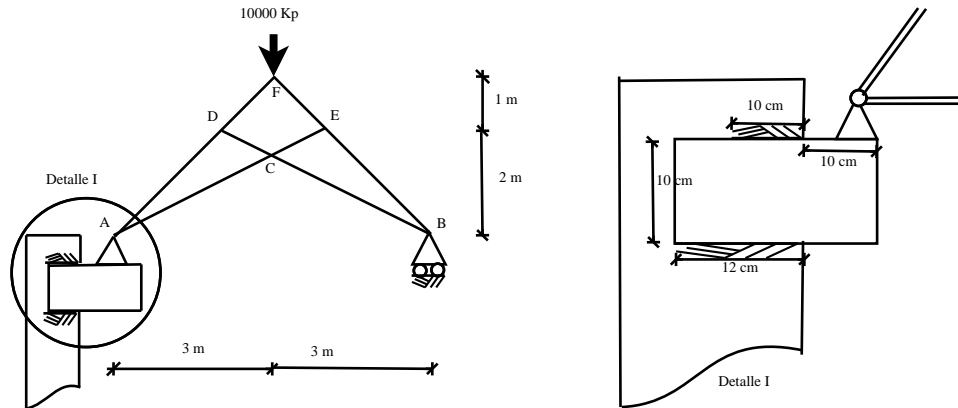


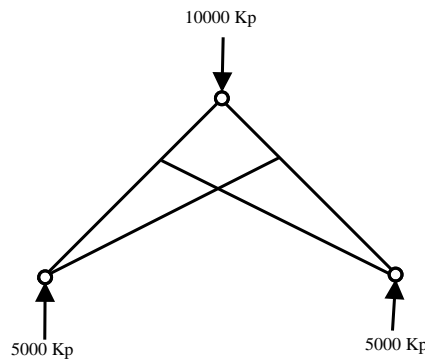
Parcial 1 RESISTENCIA DE MATERIALES II 3 de febrero de 2015

P1 ($33\frac{1}{3}$ Puntos) El sujetador para el apoyo de una cercha es una placa soldada a la columna metálica, mediante dos filetes o cordones como se muestra en la figura. Determine el calibre de los cordones para que pueda soportar el peso del extremo izquierdo de la cercha.



Solución.

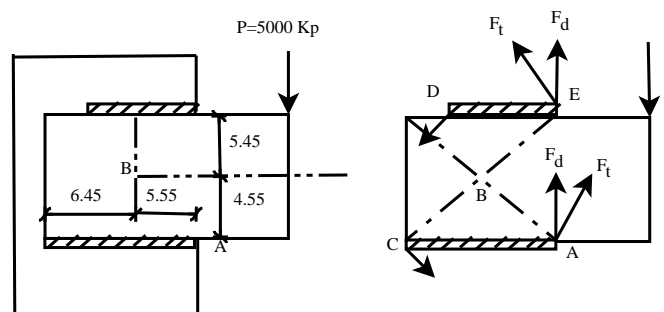
Primeramente trasladamos la reacción de la carga externa de la cercha al apoyo de la placa.



Ahora bien, el centro de gravedad de los cordones respecto a A, tiene las siguientes coordenadas

$$\begin{aligned}
 lx &= \sum lx \\
 (10 + 12)x &= 10(5) + 12(6) \\
 x &= 5.55 \text{ cm} \\
 ly &= \sum ly \\
 22x &= 10(10) \\
 x &= 4.55 \text{ cm}.
 \end{aligned}$$

Estos valores se sitúan en el punto B de la siguiente forma



El momento de P respecto de este punto, que es el par de torsión es:

$$M_T = P \cdot e = 5000(5.55 + 8) = 67550 \text{ Kp}.$$

Calculamos los momentos de inercia polar del grupo de soldaduras respecto al centro de B

$$I_P = L \left(\frac{1}{12} L^2 + x^2 + y^2 \right)$$

$$I_{P_{AC}} = 12 \left[\frac{12^2}{12} + (0.5)^2 + (4.55)^2 \right] = 395.43 \text{ cm}^3$$

$$I_{P_{DE}} = 10 \left[\frac{10^2}{12} + (0.55)^2 + (5.45)^2 \right] = 383.38 \text{ cm}^3$$

Luego el valor total de IP

$$I_P = \sum IP = 395.43 + 383.38$$

$$I_P = 778.81 \text{ cm}^3.$$

Los componentes de la carga directriz son (por unidad de longitud)

$$F_{dy} = \frac{P}{\sum L} = \frac{5000}{20} = 250 \text{ Kp/cm} = \sigma_y$$

$$F_{dx} = 0 = \sigma_x$$

Luego los tensores por unidad de longitud respectiva son

$$\tau_x = \frac{M_t y}{I_P} \quad \text{y} \quad \tau_y = \frac{M_t}{I_P}$$

$$\text{En } E \quad \tau_x = \frac{67550(5.45)}{778.81} = 472.71 \text{ Kp/cm} \leftarrow$$

$$\text{En } A \quad \tau_x = \frac{67550(4.55)}{778.81} = 394.64 \text{ Kp/cm} \rightarrow$$

Haciendo la combinación respectiva de los componentes directas de torsión, se obtienen los máximos valores de σ o τ en cada cordón:

$$\tau = \sqrt{(\sum \tau_x)^2 + (\sum \tau_y)^2}$$

$$\tau_E = \sqrt{(472.71)^2 + (250 + 481.38)^2} = 870.85 \text{ Kp/cm}^2$$

$$\tau_A = \sqrt{(394.64)^2 + (250 + 481.38)^2} = 831.06 \text{ Kp/cm}^2$$

Aplicando $P = A\tau = 831.06e$

Para la fuerza admisible por centímetro de longitud de cordón que esta es totalmente independiente de la dirección de la fuerza, el calibre e será

$$\tau_E = \text{maximal en ese punto}$$

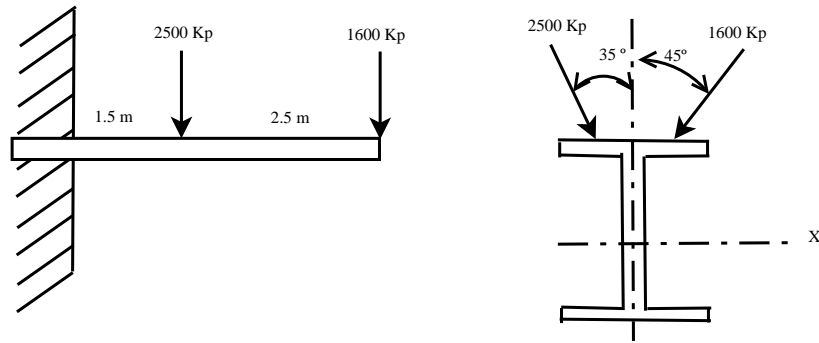
$$= 870.85$$

$$= 831.06e$$

$$e = 10.45 \text{ cm}$$

$$e = 10.5 \text{ cm}$$

P2 ($33\frac{1}{3}$ Puntos) Una viga en ménsula cuya sección es un perfil **I** de ala ancha de $20 \times 20 \text{ cm}$, el cual soporta las cargas mostradas en la figura. Calcular las tensiones en las esquinas A , B , C y D y la inclinación de la línea neutra en la sección de empotramiento. (Indicación. Usar $Z_x = 569 \text{ cm}^3$ y $Z_y = 207 \text{ cm}^3$).



Solución.

Descomponiendo las cargas en las direcciones x y y , calculamos M_x ; M_y

$$M_x = -(1600 \cos 45^\circ)3 - 2500(\cos 30^\circ)(1) = -8631.37 \text{ Kp m}$$

Por lo que produce tracción en A y B y compresión en C y D .

Momentando los componentes horizontales de las cargas respecto al eje Y en el empotramiento

$$M_y = (1600 \sin 45^\circ)3 - 2500 \sin 30^\circ(1)$$

$$M_y = 2144.11 \text{ Kp m}$$

Por lo que este momento produce tracción en A y D y compresión en C y B , luego las tensiones o esfuerzos máximos producidos en M_x y M_y serán

$$\sigma_{max_x} = \frac{M_x}{Z_x} = \frac{3631.37 \times 100}{207} = 638.20 \text{ Kp/cm}^2$$

$$\sigma_{max_y} = \frac{M_y}{Z_y} = \frac{2144.11 \times 100}{207} = 1035.80 \text{ Kp/cm}^2$$

Tensiones debido a	A	B	C	D
M_X	$= +638.20$	$+638.20$	-638.20	-638.20
M_Y	$= +1035.80$	-1035.80	-1035.80	$+1035.80$
Σ	$+1674.00$	-447.60	-1724.00	$+447.60$

No es posible aplicar directamente la ecuación

$$\tan \alpha = \frac{I_x}{I_y} \tan \theta$$

porque el plano de acción de las cargas (y los momentos flectores) no se toman constantes a

lo largo de la viga, por lo que se recurre a la ecuación

$$\sigma = \frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y}$$

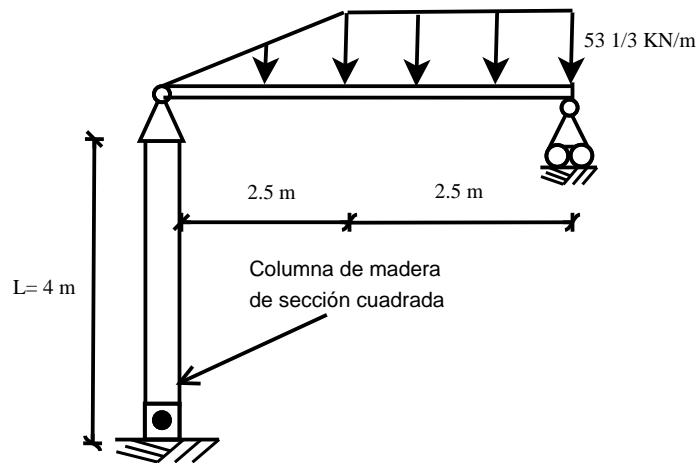
haciendo $\sigma = 0$ (tensiones nulas)

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{I_x M_y}{I_y M_x}$$

$$\tan \alpha = -\frac{5690}{2070} \left(\frac{2144.11}{-3631.37} \right)$$

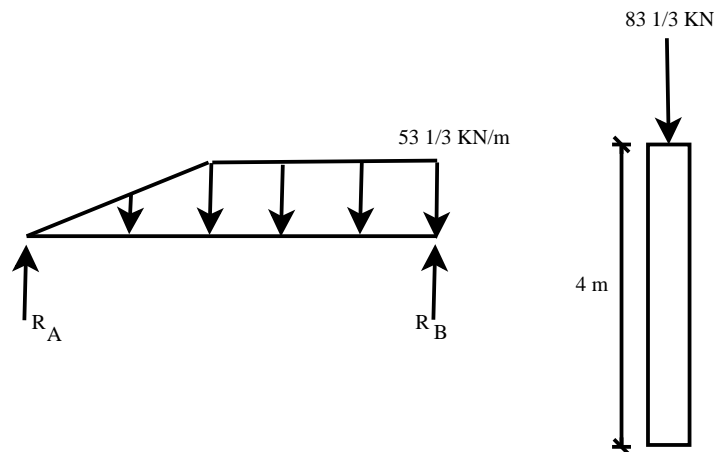
$$\alpha = 58.36^\circ$$

P3 ($33\frac{1}{3}$ Puntos) Debe construirse una columna de madera se sección cuadrada, suponiendo $E = 14 \text{ GPa}$ y $\sigma_{perm} = 12 \text{ MPa}$ con un factor de seguridad de 3.0 para calcular la carga crítica de pandeo. Determine el tamaño de la sección transversal si la columna debe soportar el extremo izquierdo de una viga cargada.



Solución.

Hallamos la carga que se transmite a la columna debido a la viga cargada



$$\begin{aligned}
 + \sum M_B &= 0 \Rightarrow \frac{53\frac{1}{3}(2.5)}{2} \left(2.5 + \frac{2.5}{2} \right) \\
 + \frac{53\frac{1}{3}(2.5)^2}{2} - R_A(5) &= 0 \\
 R_A &= 83.333 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Como el $F.S = 3$ la carga crítica será

$$P_{cr} = 3\left(83\frac{1}{3}\right)KN$$

$$P_{cr} = 250 KN$$

Sabemos que de

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \Rightarrow I = \frac{P_{cr} L^2}{\pi^2 E}$$

Pero $I = \frac{a^4}{12}$ por tratarse de un cuadrado, entonces

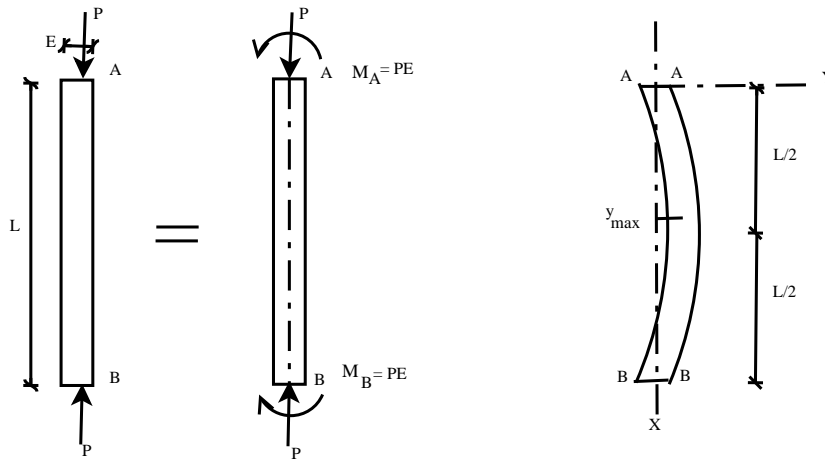
$$I = \frac{(25 \times 10^3 N)(4 m)^2}{\pi^2 (13 \times 10^9 Pa)} = 3.1176 \times 10^{-5} m^4$$

$$\frac{a^4}{12} = 3.1176 \times 10^{-5} \Rightarrow a = 0.13908 m$$

o sea que $a = 13.9 \approx 14 cm$

P4 OPCIONAL (100 Puntos) Demostrar para la carga excéntrica en una columna y estudiar el pandeo. Demostrar además, que la máxima deflexión está dada por

$$y_{\max} = \varepsilon \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{L}{2} \right) - 1 \right]$$



Solución.

Escribimos la ecuación diferencial de la curva elástica de acuerdo al diagrama de cuerpo libre

$$M = -P_y - M_A = -P_y - P\varepsilon$$

en

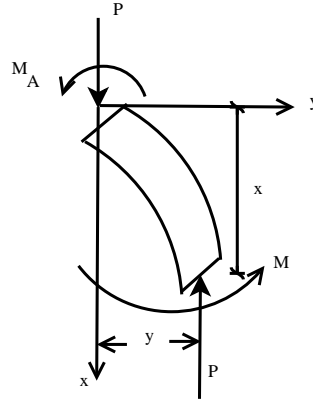
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y - \frac{P\varepsilon}{EI}$$

haciendo $\beta^2 = \frac{P}{EI}$ tenemos que

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \beta^2 y = -\beta^2 \varepsilon$$

siendo la solución general de esta ecuación

$$y = A \operatorname{sen} \beta x + B \cos \beta x - e$$



Realizando las condiciones de borde para $x = 0$, $y = 0$ se obtendrá $B = \varepsilon$ luego haciendo $x = L$, $y = 0$

$$A \operatorname{sen} \beta L = \varepsilon(1 - \cos \beta L) \quad (a)$$

siendo

$$\operatorname{sen} \beta L = 2 \operatorname{sen} \frac{\beta L}{2} \cos \frac{\beta L}{2}$$

por una relación de identidades trigonométricas, además

$$1 - \cos \beta L = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta L}{2}$$

sustituyendo esta ecuación en la ecuación (a) se obtiene después de simplificar

$$A = \varepsilon \tan \frac{\beta L}{2}$$

Ahora sustituyendo A y B en la solución general se tiene

$$y = \varepsilon \left(\tan \frac{\beta L}{2} \operatorname{sen} \beta x + \cos \beta x - 1 \right) \quad (b)$$

Entonces el valor de la deflexión máxima se halla haciendo $x = \frac{L}{2}$ en la ecuación (b)

$$\begin{aligned} y_{\text{máx}} &= \varepsilon \left(\tan \frac{\beta L}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta L}{2} + \cos \frac{\beta L}{2} - 1 \right) \\ y_{\text{máx}} &= \varepsilon \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\beta L}{2} + \cos^2 \frac{\beta L}{2}}{\cos \frac{\beta L}{2}} - 1 \right) \\ y_{\text{máx}} &= \varepsilon \left(\sec \frac{\beta L}{2} - 1 \right) \quad \text{sustituyendo el valor de } \beta \end{aligned}$$

$$\boxed{y_{\text{máx}} = \varepsilon \left(\sec \left[\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right] \right) - 1} \quad \text{Lo que se esperaba}$$