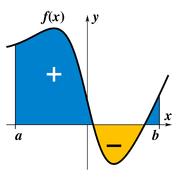
***INTEGRALES***

*Para otros usos de este término, véase* [*Integración (desambiguación)*](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n_(desambiguaci%C3%B3n))*y* [*INTEGRAL*](http://es.wikipedia.org/wiki/INTEGRAL)*.*

[](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Integral_example.png)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.5/common/images/magnify-clip.png](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Integral_example.png)

La integral definida de una función representa el área limitada por la gráfica de la función, con signo positivo cuando la función toma valores positivos y negativo cuando toma valores negativos.

La **integración** es un concepto fundamental de las [matemáticas](http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1ticas) avanzadas, especialmente en los campos del [cálculo](http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo_matem%C3%A1tico) y del [análisis matemático](http://es.wikipedia.org/wiki/An%C3%A1lisis_matem%C3%A1tico). Básicamente, una **integral** es una [suma](http://es.wikipedia.org/wiki/Suma) de [infinitos](http://es.wikipedia.org/wiki/Infinito) sumandos, infinitamente pequeños.

Dada una [función](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_matem%C3%A1tica) *f*(*x*) de una [variable](http://es.wikipedia.org/wiki/Variable) [real](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real) **x** y un [intervalo](http://es.wikipedia.org/wiki/Intervalo_(matem%C3%A1ticas)) [*a*,*b*] de la [recta real](http://es.wikipedia.org/wiki/Recta_real), la **integral**

\int_a^b f(x)\,dx 

es igual al [área](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81rea) de la región del plano *xy* limitada entre la [gráfica](http://es.wikipedia.org/wiki/Gr%C3%A1fica_de_una_funci%C3%B3n) de *f*, el eje *x*, y las líneas verticales *x* = *a* y *x* = *b*, donde son negativas las áreas por debajo del eje *x*.

La palabra "integral" también puede hacer referencia a la noción de *primitiva*: una función *F*, cuya [derivada](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada) es la función dada *f*. En este caso se denomina [**integral indefinida**](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_indefinida), mientras que las integrales tratadas en este artículo son las **integrales definidas**. Algunos autores mantienen una distinción entre integrales primitivas e indefinidas.

[Newton](http://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton) y [Leibniz](http://es.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz) a finales del [siglo XVII](http://es.wikipedia.org/wiki/Siglo_XVII). A través del [teorema fundamental del cálculo](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_del_c%C3%A1lculo), que desarrollaron los dos de forma independiente, la integración se conecta con la [derivación](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada), y la integral definida de una función se puede calcular fácilmente una vez se conoce una antiderivada. Las integrales y las derivadas pasaron a ser herramientas básicas del [cálculo](http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo_matem%C3%A1tico), con numerosas aplicaciones en ciencia e ingeniería.

[Bernhard Riemann](http://es.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann) dio una definición rigurosa de la integral. Se basa en un [límite](http://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADmite) que aproxima el área de una región curvilínea a base de partirla en pequeños trozos verticales. A comienzos del [siglo XIX](http://es.wikipedia.org/wiki/Siglo_XIX), empezaron a aparecer nociones más sofisticadas de la integral, donde se han generalizado los tipos de las funciones y los dominios sobre los cuales se hace la integración. La [integral curvilínea](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_curvil%C3%ADnea) se define para funciones de dos o tres variables, y el intervalo de integración [*a*,*b*] se sustituye por una cierta [curva](http://es.wikipedia.org/wiki/Curva) que conecta dos puntos del plano o del espacio. En una [integral de superficie](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_de_superficie), la curva se sustituye por un trozo de una [superficie](http://es.wikipedia.org/wiki/Superficie_(matem%C3%A1tica)) en el espacio tridimensional.

Las integrales de las [formas diferenciales](http://es.wikipedia.org/wiki/Forma_diferencial) desempeñan un papel fundamental en la [geometría diferencial](http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_diferencial) moderna. Estas generalizaciones de la integral surgieron primero a partir de las necesidades de la [física](http://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%ADsica), y tienen un papel importante en la formulación de muchas leyes físicas cómo, por ejemplo, las de la [electromagnetismo](http://es.wikipedia.org/wiki/Electromagnetismo). Los conceptos modernos de integración se basan en la teoría matemática abstracta conocida como [integral de Lebesgue](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_de_Lebesgue), que fue desarrollada por [Henri Lebesgue](http://es.wikipedia.org/wiki/Henri_Lebesgue).

|  |
| --- |
| **Contenido**  [[ocultar](javascript:toggleToc())]   * [1 Historia](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Historia)   + [1.1 Integración antes del cálculo](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Integraci.C3.B3n_antes_del_c.C3.A1lculo)   + [1.2 Newton y Leibniz](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Newton_y_Leibniz)   + [1.3 Formalización de las integrales](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Formalizaci.C3.B3n_de_las_integrales)   + [1.4 Notación](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Notaci.C3.B3n) * [2 Terminología y notación](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Terminolog.C3.ADa_y_notaci.C3.B3n) * [3 Conceptos y aplicaciones](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Conceptos_y_aplicaciones)   + [3.1 Integral de Riemann](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Integral_de_Riemann)   + [3.2 Integral de Lebesgue](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Integral_de_Lebesgue)   + [3.3 Otras integrales](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Otras_integrales) * [4 Propiedades de la integración](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Propiedades_de_la_integraci.C3.B3n)   + [4.1 Linealidad](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Linealidad)   + [4.2 Desigualdades con integrales](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Desigualdades_con_integrales)   + [4.3 Convenciones](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Convenciones) * [5 Teorema fundamental del cálculo](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Teorema_fundamental_del_c.C3.A1lculo)   + [5.1 Enunciado de los teoremas](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Enunciado_de_los_teoremas) * [6 Extensiones](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Extensiones)   + [6.1 Integrales impropias](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Integrales_impropias)   + [6.2 Integración múltiple](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Integraci.C3.B3n_m.C3.BAltiple)   + [6.3 Integrales de línea](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Integrales_de_l.C3.ADnea)   + [6.4 Integrales de superficie](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Integrales_de_superficie)   + [6.5 Integrales de formas diferenciales](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Integrales_de_formas_diferenciales) * [7 Métodos y aplicaciones](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#M.C3.A9todos_y_aplicaciones)   + [7.1 Cálculo de integrales](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#C.C3.A1lculo_de_integrales)   + [7.2 Algoritmos simbólicos](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Algoritmos_simb.C3.B3licos)   + [7.3 Cuadratura numérica](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Cuadratura_num.C3.A9rica) * [8 Referencias y notas](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Referencias_y_notas) * [9 Bibliografia](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Bibliografia) * [10 Véase también](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#V.C3.A9ase_tambi.C3.A9n) * [11 Enlaces externos](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Enlaces_externos)   + [11.1 Libros online](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#Libros_online) |

**Historia** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=1)]

**Integración antes del cálculo** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=2)]

La integración se puede trazar en el pasado hasta el [antiguo Egipto](http://es.wikipedia.org/wiki/Antiguo_Egipto), *circa* 1800 a. C., con el [papiro de Moscú](http://es.wikipedia.org/wiki/Papiro_de_Mosc%C3%BA), donde se demuestra que ya se conocía una fórmula para calcular el volumen de un [tronco](http://es.wikipedia.org/wiki/Tronco_(matem%C3%A1ticas)) [piramidal](http://es.wikipedia.org/wiki/Pir%C3%A1mide_(geometr%C3%ADa)). La primera técnica sistemática documentada capaz de determinar integrales es el [método de exhausción](http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_exhausci%C3%B3n) de [Eudoxo](http://es.wikipedia.org/wiki/Eudoxo_de_Cnido) (*circa* 370 a. C.), que trataba de encontrar áreas y volúmenes a base de partirlos en un número infinito de formas para las cuales se conocieran el área o el volumen. Este método fue desarrollado y usado más adelante por [Arquímedes](http://es.wikipedia.org/wiki/Arqu%C3%ADmedes), que lo empleó para calcular áreas de parábolas y una aproximación al área del círculo. Métodos similares fueron desarrollados de forma independiente en [China](http://es.wikipedia.org/wiki/China) alrededor del [siglo III](http://es.wikipedia.org/wiki/Siglo_III) por [Liu Hui](http://es.wikipedia.org/wiki/Liu_Hui), que los usó para encontrar el área del círculo. Más tarde, [Zu Chongzhi](http://es.wikipedia.org/wiki/Zu_Chongzhi) usó este método para encontrar el volumen de una [esfera](http://es.wikipedia.org/wiki/Esfera). En el *Siddhanta Shiromani*, un libro de astronomía del [siglo XII](http://es.wikipedia.org/wiki/Siglo_XII) del matemático [indio](http://es.wikipedia.org/wiki/India) [Bhaskara II](http://es.wikipedia.org/wiki/Bhaskara_II), se encuentran algunas ideas de cálculo integral.

Hasta el [siglo XVI](http://es.wikipedia.org/wiki/Siglo_XVI) no empezaron a aparecer adelantos significativos sobre el método de exhausción. En esta época, por un lado, con el trabajo de [Cavalieri](http://es.wikipedia.org/wiki/Bonaventura_Cavalieri) con su *método de los indivisibles* y, por otro lado, con los trabajos de [Fermat](http://es.wikipedia.org/wiki/Fermat), se empezó a desarrollar los fundamentos del cálculo moderno. A comienzos del [siglo XVII](http://es.wikipedia.org/wiki/Siglo_XVII), se produjeron nuevos adelantos con las aportaciones de [Barrow](http://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Barrow) y [Torricelli](http://es.wikipedia.org/wiki/Evangelista_Torricelli), que presentaron los primeros indicios de una conexión entre la integración y la [derivación](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada).

**Newton y Leibniz** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=3)]

Los principales adelantos en integración vinieron en el siglo XVII con el descubrimiento del [teorema fundamental del cálculo](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_del_c%C3%A1lculo), realizado de manera independiente por [Newton](http://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton) y [Leibniz](http://es.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz). El teorema demuestra una conexión entre la integración y la derivación. Esta conexión, combinada con la facilidad, comparativamente hablando, del cálculo de derivadas, se puede usar para calcular integrales. En particular, el teorema fundamental del cálculo permite resolver una clase más amplia de problemas. También cabe destacar todo el marco estructural alrededor de las matemáticas que desarrollaron también Newton y Leibniz. El llamado cálculo infinitesimal permitió analizar, de forma precisa, funciones con dominios continuos. Posteriormente, este marco ha evolucionado hacia el [cálculo](http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo_matem%C3%A1tico) moderno, cuya notación para las integrales procede directamente del trabajo de Leibniz.

**Formalización de las integrales** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=4)]

Aunque Newton y Leibniz suministraron un enfoque sistemático a la integración, su trabajo carecía de un cierto nivel de rigor. Es memorable el ataque del [obispo Berkeley](http://es.wikipedia.org/wiki/George_Berkeley) calificando los [infinitesimales](http://es.wikipedia.org/wiki/Infinitesimal) como los "los fantasmas de las cantidades que se desvanecen". El cálculo adquirió una posición más firme con el desarrollo de los [límites](http://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADmites) y, en la primera mitad del [siglo XIX](http://es.wikipedia.org/wiki/Siglo_XIX), recibió una fundamentación adecuada por parte de [Cauchy](http://es.wikipedia.org/wiki/Cauchy). La integración fue rigurosamente formalizada por primera vez por [Riemann](http://es.wikipedia.org/wiki/Riemann), empleando límites. A pesar de que todas las funciones continuas fragmentadas y acotadas son Riemann integrables en un intervalo acotado, más tarde se consideraron funciones más generales para las cuales no se aplica la definición de Riemann, y [Lebesgue](http://es.wikipedia.org/wiki/Lebesgue) formuló una definición diferente de la integral[[1]](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_note-0) basada en la [teoría de la medida](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_la_medida). También se propusieron otras definiciones de integral, que amplían las definiciones de Riemann y Lebesgue.

**Notación** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=5)]

[Isaac Newton](http://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton) usaba una pequeña barra vertical encima de una variable para indicar integración, o ponía la variable dentro de una caja. La barra vertical se confundía fácilmente con \dot{x}o x'\,\!, que Newton usaba para indicar la derivación, y además la notación "caja" era difícil de reproducir por los impresores; por ello, estas notaciones no fueron ampliamente adoptadas.

La notación moderna de las integrales indefinidas fue presentada por [Gottfried Leibniz](http://es.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz) en [1675](http://es.wikipedia.org/wiki/1675).[[2]](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_note-1) [[3]](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_note-2) Para indicar *summa* (en [latín](http://es.wikipedia.org/wiki/Lat%C3%ADn), "suma" o "total"), adaptó el símbolo integral, "∫", a partir de una [letra S alargada](http://es.wikipedia.org/wiki/S_larga). La notación moderna de la integral definida, con los límites arriba y abajo del signo integral, la usó por primera vez [Joseph Fourier](http://es.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier) en *Mémoires* de la Academia Francesa, alrededor de 1819–20, reimpresa en su libro de 1822.[[4]](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_note-3) [[5]](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_note-4) En la [notación matemática en árabe moderno](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Notaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica_en_%C3%A1rabe_moderno&action=edit&redlink=1), que se escribe de derecha a izquierda, se usa un signo integral invertido [Signed'IntegracióArabic.png](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Signed%27Integraci%C3%B3Arabic.png).[[6]](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_note-5)

**Terminología y notación** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=6)]

Si una función tiene una integral, se dice que es **integrable**. De la función de la cual se calcula la integral se dice que es el **integrando**. Se denomina **dominio de integración** a la región sobre la cual se integra la función. Si la integral no tiene un dominio de integración, se considera indefinida (la que tiene dominio se considera definida). En general, el integrando puede ser una función de más de una variable, y el dominio de integración puede ser un área, un volumen, una región de dimensión superior, o incluso un espacio abstracto que no tiene estructura geométrica en ningún sentido usual.

El caso más sencillo, la integral de una función real *f* de una variable real *x* sobre el intervalo [*a*, *b*], se escribe

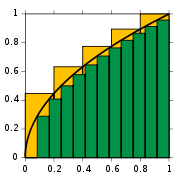
\int_a^b f(x)\,dx . 

El signo ∫, una "S" larga, representa la integración; *a* y *b* son el **límite inferior** y el **límite superior** de la integración y definen el dominio de integración; *f* es el integrando, que se tiene que evaluar al variar *x* sobre el intervalo [*a*,*b*]; y *dx* puede tener diferentes interpretaciones dependiendo de la teoría que se emplee. Por ejemplo, puede verse simplemente como una indicación de que *x* es la variable de integración, como una representación de los pesos en la suma de Riemann, una medida (en la integración de Lebesgue y sus extensiones), un infinitesimal (en [análisis no estándar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=An%C3%A1lisis_no_est%C3%A1ndar&action=edit&redlink=1)) o como una cantidad matemática independiente: una [forma diferencial](http://es.wikipedia.org/wiki/Forma_diferencial). Los casos más complicados pueden variar la notación ligeramente.

**Conceptos y aplicaciones** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=7)]

|  |  |
| --- | --- |
| [Book important2.svg](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Book_important2.svg) | Este artículo o sección tiene **un estilo difícil de entender** **para los lectores interesados en el tema**. Si tienes capacidad, por favor [**edítalo**](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit), contribuye a hacerlo más accesible para el público general, sin eliminar los detalles técnicos que interesan a los especialistas. |

Las integrales aparecen en muchas situaciones prácticas. Consideremos una piscina. Si es rectangular, entonces, a partir de su longitud, anchura y profundidad, se puede determinar fácilmente el volumen de agua que puede contener (para llenarla), el área de la superficie (para cubrirla), y la longitud de su borde (para atarla). Pero si es ovalada con un fondo redondeado, todas estas cantidades piden integrales. Al comienzo puede ser suficiente con aproximaciones prácticas, pero al final harán falta respuestas exactas y rigurosas a este tipo de problemas.

[](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Integral_approximations.svg)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.5/common/images/magnify-clip.png](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Integral_approximations.svg)

Aproximaciones a la integral de √*x* entre 0 y 1, con ■ 5 muestras por la izquierda (arriba) y ■ 12 muestras por la derecha (abajo).

Para empezar, se considerará la curva *y* = *f*(*x*) entre *x* = 0 y *x* = 1, con *f*(*x*) = √*x*. La pregunta es:

¿Cuál es el área bajo la función *f*, al intervalo desde 0 hasta 1?

Esta área (todavía desconocida) será la **integral** de *f*. La notación para esta integral será

 \int_0^1 \sqrt x \, dx \,\!.

Como primera aproximación, se mira al cuadrado unidad dado por los lados *x*=0 hasta *x*=1 y *y*=*f*(0)=0 y *y*=*f*(1)=1. Su área es exactamente 1. Tal como se puede ver, el verdadero valor de la integral tiene que ser de alguna forma más pequeño. Reduciendo el ancho de los rectángulos empleados para hacer la aproximación se obtendrá un mejor resultado; así, se parte el intervalo en cinco pasos, empleando para la aproximación los puntos 0, 1⁄5, 2⁄5, así hasta 1. Se ajusta una caja cada paso empleando la altura del lado derecho de cada pedazo de la curva, así √1⁄5, √2⁄5, y así hasta √1 = 1. Sumando las áreas de estos rectángulos, se obtiene una mejor aproximación de la integral que se está buscando,

\sqrt {\frac {1} {5}} \left ( \frac {1} {5} - 0 \right ) + \sqrt {\frac {2} {5}} \left ( \frac {2} {5} - \frac {1} {5} \right ) + \ldots + \sqrt {\frac {5} {5}} \left ( \frac {5} {5} - \frac {4} {5} \right ) \approx 0.7497\,\!

Nótese que se está sumando una cantidad finita de valores de la función *f*, multiplicados por la diferencia entre dos puntos de aproximación sucesivos. Se puede ver fácilmente que la aproximación continúa dando un valor más grande que el de la integral. Empleando más pasos se obtiene una aproximación más ajustada, pero no será nunca exacta: si en vez de 5 subintervalos se toman doce y se coge el valor de la izquierda, tal como se muestra en el dibujo, se obtiene un valor aproximado para el área, de 0.6203, que en este caso es demasiado pequeño. La idea clave es la transición desde la suma de *una cantidad finita* de diferencias de puntos de aproximación multiplicados por los respectivos valores de la función, hasta usar pasos infinitamente finos, o [*infinitesimales*](http://es.wikipedia.org/wiki/Infinitesimal). La notación

 \int f(x) \, dx \,\!

concibe la integral como una suma ponderada (denotada por la "S" alargada), de los valores de la función (como las alzadas, *y* = *f*(*x*)) multiplicados por pasos de anchura infinitesimal, los llamados *diferenciales* (indicados por *dx*).

Con respecto al **cálculo real de integrales**, el [teorema fundamental del cálculo](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_del_c%C3%A1lculo), debido a Newton y Leibniz, es el vínculo fundamental entre las operaciones de [derivación](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada) e integración. Aplicándolo a la curva raíz cuadrada, se tiene que mirar la función relacionada *F*(*x*) = 2⁄3*x*3/2 y simplemente coger *F*(1)−*F*(0), donde 0 y 1 son las fronteras del [intervalo](http://es.wikipedia.org/wiki/Intervalo_(matem%C3%A1ticas)) [0,1]. (Éste es un ejemplo de una regla general, que dice que para *f*(*x*) = *xq*, con *q* ≠ −1, la función relacionada, la llamada [primitiva](http://es.wikipedia.org/wiki/Primitiva) es *F*(*x*) = (*xq*+1)/(*q*+1).) De modo que el valor exacto del área bajo la curva se calcula formalmente como

 \int_0^1 \sqrt x \cdot dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} \cdot dx = \int_0^1 d \left({\textstyle \frac 2 3} x^{\frac{3}{2}}\right) = {\textstyle \frac 2 3}.

Históricamente, después de que los primeros esfuerzos de definir rigurosamente los infinitesimales no fructificasen, Riemann definió formalmente las integrales como el [límite](http://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADmite) de sumas ponderadas, de forma que el *dx* sugiere el límite de una diferencia (la anchura del intervalo). La dependencia de la definición de Riemann de los intervalos y la continuidad motivó la aparición de nuevas definiciones, especialmente la integral de Lebesgue, que se basa en la habilidad de extender la idea de "medida" de maneras mucho más flexibles. Así, la notación

 \int_A f(x) \, d\mu \,\!

hace referencia a una suma ponderada de valores en que se divide la función, donde μ mide el peso que se tiene que asignar a cada valor. (Aquí *A* indica la región de integración.) La [geometría diferencial](http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_diferencial), con su "cálculo de [variedades](http://es.wikipedia.org/wiki/Variedad_(matem%C3%A1tica))", proporciona otra interpretación a esta notación familiar. Ahora *f*(*x*) y *dx* pasan a ser una [forma diferencial](http://es.wikipedia.org/wiki/Forma_diferencial), ω = *f*(*x*)*dx*, aparece un nuevo [operador diferencial](http://es.wikipedia.org/wiki/Operador_diferencial) **d**, conocido como la [derivada exterior](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada_exterior), y el teorema fundamental pasa a ser el (más general) [teorema de Stokes](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Stokes),

 \int_{A} \bold{d} \omega = \int_{\part A} \omega , \,\!

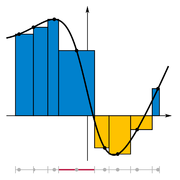
a partir del cual se deriva el [teorema de Green](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Green), el [teorema de la divergencia](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_la_divergencia), y el [teorema fundamental del cálculo](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_del_c%C3%A1lculo).

Recientemente, los infinitesimales han reaparecido con rigor, a través de innovaciones modernas como el [análisis no estándar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=An%C3%A1lisis_no_est%C3%A1ndar&action=edit&redlink=1). Estos métodos no sólo reivindican la intuición de los pioneros, también llevan hacia las nuevas matemáticas, y hacen más intuitivo y comprensible el trabajo con cálculo infinitesimal.

A pesar de que hay diferencias entre todas estas concepciones de la integral, hay un solapamiento considerable. Así, el área de la piscina oval se puede hallar como una elipse geométrica, como una suma de infinitesimales, como una integral de Riemann, como una integral de Lebesgue, o como una variedad con una forma diferencial. El resultado obtenido con el cálculo será el mismo en todos los casos.

**Integral de Riemann** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=8)]

*Artículo principal:* [*Integral de Riemann*](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_de_Riemann)

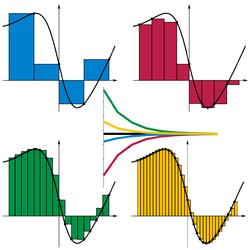
[](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Integral_Riemann_sum.png)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.5/common/images/magnify-clip.png](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Integral_Riemann_sum.png)

Integral con el planteamiento de Riemann hace una suma basada en una *partición etiquetada*, con posiciones de muestreo y anchuras irregulares (el máximo en rojo). El verdadero valor es 3,76; la estimación obtenida es 3,648.

La integral de Riemann se define en términos de [sumas de Riemann](http://es.wikipedia.org/wiki/Suma_de_Riemann) de funciones respecto de *particiones etiquetadas* de un intervalo. Sea [*a*,*b*] un [intervalo](http://es.wikipedia.org/wiki/Intervalo_(matem%C3%A1ticas)) cerrado de la recta real; entonces una *partición etiquetada* de [*a*,*b*] es una secuencia finita

 a = x_0 \le t_1 \le x_1 \le t_2 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-1} \le t_n \le x_n = b . \,\!

[](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Riemann_sum_convergence.png)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.5/common/images/magnify-clip.png](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Riemann_sum_convergence.png)

Convergencia de sumatorios de Riemann a medida en que se parten los intervalos, cuando se muestrea a ■ la derecha, ■ el mínimo, ■ el máximo, o ■ la izquierda.

Esto divide al intervalo [*a*,*b*] en *i* subintervalos [*xi*−1, *xi*], cada uno de los cuales es "etiquetado" con un punto especificado *ti* de; [*xi*−1, *xi*]. Sea Δ*i* = *xi*−*xi*−1 la anchura del subintervalo *i*; el *paso* de esta partición etiquetada es el ancho del subintervalo más grande obtenido por la partición, max*i*=1…*n* Δ*i*. Un *sumatorio de Riemann* de una función *f* respecto de esta partición etiquetada se define como

\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta_i ; 

Así cada término del sumatorio es el área del rectángulo con altura igual al valor de la función en el punto especificado del subintervalo dado, y de la misma anchura que la anchura del subintervalo. La *integral de Riemann* de una función *f* sobre el intervalo [*a*,*b*] es igual a *S* si:

Para todo ε > 0 existex δ > 0 tal que, para cualquier partición etiquetada [*a*,*b*] con paso más pequeño que δ, se tiene

\left| S - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_i \right| < \varepsilon 

Cuando las etiquetas escogidas dan el máximo (o mínimo) valor de cada intervalo, el sumatorio de Riemann pasa a ser un [sumatorio de Darboux](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_de_Darboux) superior (o inferior), lo que sugiere la estrecha conexión que hay entre la integral de Riemann y la [integral de Darboux](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_de_Darboux).

**Integral de Lebesgue** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=9)]

*Artículo principal:* [*Integral de Lebesgue*](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_de_Lebesgue)

La integral de Riemann no está definida para un ancho abanico de funciones y situaciones de importancia práctica (y de interés teórico). Por ejemplo, la integral de Riemann puede integrar fácilmente la densidad para de obtener la masa de una viga de acero, pero no se puede adaptar a una bola de acero que se apoya encima. Esto motiva la creación de otras definiciones, bajo las cuales se puede integrar un surtido más amplio de funciones.[[7]](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_note-6) La integral de Lebesgue, en particular, logra una gran flexibilidad a base de centrar la atención en los pesos de la suma ponderada.

Así, la definición de la integral de Lebesgue empieza con una [medida](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Medida_(matem%C3%A1ticas)&action=edit&redlink=1), μ. En el caso más sencillo, la [medida de Lebesgue](http://es.wikipedia.org/wiki/Medida_de_Lebesgue) μ(*A*) de un intervalo *A* = [*a*,*b*] es su ancho, *b* − *a*, así la integral de Lebesgue coincide con la integral de Riemann cuando existen ambas. En casos más complicados, los conjuntos a medir pueden estar altamente fragmentados, sin continuidad y sin ningún parecido a intervalos.

Para explotar esta flexibilidad, la integral de Lebesgue invierte el enfoque de la suma ponderada. Como expresa Folland:[[8]](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_note-7) "Para calcular la integral de Riemann de *f*, se particiona el dominio [*a*,*b*] en subintervalos", mientras que en la integral de Lebesgue, "de hecho lo que se está partiendo es el recorrido de *f*".

Un enfoque habitual define primero la integral de la [función característica](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Funci%C3%B3n_caracter%C3%ADstica_(matem%C3%A1ticas)&action=edit&redlink=1) de un [conjunto mensurable](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Conjunto_mensurable&action=edit&redlink=1) *A* por:

\int 1_A d\mu = \mu(A).

Esto se extiende por linealidad a las [funciones escalonadas](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Funciones_escalonadas&action=edit&redlink=1) simples, que sólo tienen un número finito *n*, de valores diferentes no negativos:

\begin{align}
 \int s \, d\mu &{}= \int\left(\sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}\right) d\mu \\
  &{}= \sum_{i=1}^{n} a_i\int 1_{A_i} \, d\mu \\
  &{}= \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mu(A_i)
\end{align}

(donde la imagen de *Ai* al aplicarle la función escalonada *s* es el valor constante *ai*). Así, si *E* es un conjunto mesurable, se define

 \int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mu(A_i \cap E) . 

Entonces, para cualquier [función mesurable](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Funci%C3%B3n_mesurable&action=edit&redlink=1) no negativa *f* se define

\int_E f \, d\mu = \sup\left\{\int_E s \, d\mu\, \colon 0 \leq s\leq f\text{ y } s\text{ es una funcion escalonada}\right\};

Es decir, se establece que la integral de *f* es el [supremo](http://es.wikipedia.org/wiki/Supremo) de todas las integrales de funciones escalonadas que son más pequeñas o iguales que *f*. Una función mesurable cualquiera *f*, se separa entre sus valores positivos y negativos a base de definir

\begin{align}
 f^+(x) &{}= \begin{cases}
               f(x), & \text{si } f(x) > 0 \\
               0, & \text{de otro modo}
             \end{cases} \\
 f^-(x) &{}= \begin{cases}
               -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \\
               0, & \text{de otro modo}
             \end{cases}
\end{align}

Finalmente, *f* es Lebesgue integrable si

\int_E |f| \, d\mu < \infty , \,\!

y entonces se define la integral por

\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu . \,\!

Cuando el espacio métrico en el que están definidas las funciones es también un [espacio topológico](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_topol%C3%B3gico) [localmente compacto](http://es.wikipedia.org/wiki/Compacidad_local) (como es el caso de los números reales **R**), las medidas compatibles con la topología en un sentido adecuado ([medidas de Radon](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Medida_de_Radon&action=edit&redlink=1), de las cuales es un ejemplo la medida de Lebesgue) una integral respecto de ellas se puede definir de otra manera, se empieza a partir de las integrales de las [funciones continuas](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Funciones_continuas&action=edit&redlink=1) con [soporte compacto](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Soporte_(matem%C3%A1ticas)&action=edit&redlink=1). De forma más precisa, las funciones compactamente soportadas forman un [espacio vectorial](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_vectorial) que comporta una [topología](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_topol%C3%B3gico) natural, y se puede definir una medida (Radon) como *cualquier* funcional [lineal](http://es.wikipedia.org/wiki/Aplicaci%C3%B3n_lineal) continuo de este espacio; entonces el valor de una medida en una función compactamente soportada, es también, por definición, la integral de la función. Entonces se continúa expandiendo la medida (la integral) a funciones más generales por continuidad, y se define la medida de un conjunto como la integral de su función característica. Este es el enfoque que toma [Bourbaki](http://es.wikipedia.org/wiki/Nicolas_Bourbaki)[[9]](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_note-8) y cierto número de otros autores. Para más detalles, véase [medidas de Radon](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Medidas_de_Radon&action=edit&redlink=1).

**Otras integrales** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=10)]

A pesar de que las integrales de Riemann y Lebesgue son las definiciones más importantes de integral, hay unas cuántas más, por ejemplo:

* La [integral de Riemann-Stieltjes](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_de_Riemann-Stieltjes), una extensión de la integral de Riemann.
* La [integral de Lebesgue-Stieltjes](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integral_de_Lebesgue-Stieltjes&action=edit&redlink=1), desarrollada por [Johann Radon](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Johann_Radon&action=edit&redlink=1), que generaliza las integrales de [Riemann-Stieltjes](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_de_Riemann-Stieltjes) y de [Lebesgue](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_de_Lebesgue).
* La [integral de Daniell](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integral_de_Daniell&action=edit&redlink=1), que incluye la [integral de Lebesgue](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_de_Lebesgue) y la [integral de Lebesgue-Stieltjes](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integral_de_Lebesgue-Stieltjes&action=edit&redlink=1) sin tener que depender de ninguna [medida](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Medida_(matem%C3%A1ticas)&action=edit&redlink=1).
* La [integral de Henstock-Kurzweil](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integral_de_Henstock-Kurzweil&action=edit&redlink=1), definida de forma variada por [Arnaud Denjoy](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Arnaud_Denjoy&action=edit&redlink=1), [Oskar Perron](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Oskar_Perron&action=edit&redlink=1), y [Jaroslav Kurzweil](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Jaroslav_Kurzweil&action=edit&redlink=1), y desarrollada por [Ralph Henstock](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Ralph_Henstock&action=edit&redlink=1).
* La [integral de Darboux](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_de_Darboux), que es equivalente a la integral de Riemann.
* La [integral de Haar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integral_de_Haar&action=edit&redlink=1), que es la integral de Lebesgue con la [medida de Haar](http://es.wikipedia.org/wiki/Medida_de_Haar).
* La [integral de McShane](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integral_de_McShane&action=edit&redlink=1).
* La [integral de Buchner](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integral_de_Buchner&action=edit&redlink=1).

**Propiedades de la integración** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=11)]

**Linealidad** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=12)]

* El conjunto de las funciones Riemann integrables en un intervalo cerrado [*a*, *b*] forman un [espacio vectorial](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_vectorial) con las operaciones de suma (la función suma de otras dos es la función que a cada punto le hace corresponder la suma de las imágenes de este punto por cada una de las otras dos) y la multiplicación por un escalar. La operación integración

 f \mapsto \int_a^b f \; dx

es un [funcional lineal](http://es.wikipedia.org/wiki/Funcional_lineal) de este espacio vectorial. Así, en primer lugar, el conjunto de funciones integrables es cerrado con la [combinación lineal](http://es.wikipedia.org/wiki/Combinaci%C3%B3n_lineal), y en segundo lugar, la integral de una combinación lineal es la combinación lineal de las integrales,

 \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \,dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx. \,

* De forma parecida, el conjunto de las funciones reales Lebesgue integrables en un [espacio métrico](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_m%C3%A9trico) *E* dado, con la medida *μ* es cerrado respecto de las combinaciones lineales y por lo tanto forman un espacio vectorial, y la integral de Lebesgue

 f\mapsto \int_E f d\mu 

es un funcional lineal de este espacio vectorial, de forma que

 \int_E (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu + \beta \int_E g \, d\mu. 

* De forma más general, si se toma el espacio vectorial de todas las [funciones mesurables](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Funciones_mesurables&action=edit&redlink=1) sobre un espacio métrico (*E*,*μ*), que toman valores en un [espacio vectorial topológico](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_vectorial_topol%C3%B3gico) [completo](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_m%C3%A9trico_completo) [localmente compacto](http://es.wikipedia.org/wiki/Compacidad_local) *V* sobre un [campo topológico](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Campo_topol%C3%B3gico&action=edit&redlink=1) [localmente compacto](http://es.wikipedia.org/wiki/Compacidad_local) *K*, *f* : *E* → *V*. Entonces se puede definir una aplicación integración abstracta que a cada función *f* le asigna un elemento de *V* o el símbolo *∞*,

 f\mapsto\int_E f d\mu, \,

que es compatible con las combinaciones lineales. En esta situación, la linealidad se sostiene para el subespacio de las funciones, cuya integral es un elemento de *V* (es decir, las integrales "finitas"). Los casos más importantes surgen cuando *K* es **R**, **C**, o una extensión finita del campo **Q***p* de [números p-ádicos](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_p-%C3%A1dico), y *V* es un espacio vectorial de dimensión finita sobre *K*, y cuando *K*=**C** y *V* es un [espacio de Hilbert](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_de_Hilbert) complejo.

La linealidad, junto con algunas propiedad naturales de continuidad y la normalización para ciertas clases de funciones "simples", se pueden usar para dar una definición alternativa de integral. Este es el enfoque de [Daniell](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integral_de_Daniell&action=edit&redlink=1) para el caso de funciones reales en un conjunto *X*, generalizado por [Bourbaki](http://es.wikipedia.org/wiki/Bourbaki) a funciones que toman valores en un espacio vectorial topológicamente compacto. Véase Hildebrandt (1953)[[10]](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_note-9) para una caracterización axiomática de la integral.

**Desigualdades con integrales** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=13)]

Se verifican varias desigualdades generales para [funciones](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_(matem%C3%A1ticas)) Riemann integrables definidas en un [intervalo](http://es.wikipedia.org/wiki/Intervalo_(matem%C3%A1ticas)) [cerrado](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_cerrado) y [acotado](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Conjunto_acotado&action=edit&redlink=1) [*a*, *b*] y se pueden generalizar a otras nociones de integral (Lebesgue y Daniell).

* *Cotas superiores e inferiores.* Una función *f* integrable en [*a*, *b*], es necesariamente [acotada](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Funci%C3%B3n_acotada&action=edit&redlink=1) en el intervalo. Por lo tanto hay dos [números reales](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_reales) *m* y *M* tales que *m* ≤ *f* (*x*) ≤ *M* para todo *x* de [*a*, *b*]. Dado que los sumatorios superior e inferior de *f* sobre [*a*, *b*] son también acotados para *m*(*b* − *a*) y *M*(*b* − *a*) respectivamente, de aquí resulta que

 m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a). 

* *Desigualdades entre funciones.* Si *f*(*x*) ≤ *g*(*x*) para todo *x* de [*a*, *b*] entonces cada uno de los sumatorios superior e inferior de *f* son acotados inferior y superiormente por los sumatorios superior e inferior de *g* respectivamente. Así

 \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx. 

Esto es una generalización de las desigualdades anteriores, dado que *M '(*b *−* a*) es la integral de la función constante con valor* M *en el intervalo [*a*,* b*].*

* *Subintervalos.* Si [*c*, *d*] es un subintervalo de [*a*, *b*] y *f*(*x*) es no negativa para todo *x*, entonces

 \int_c^d f(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx. 

* *Productos y valores absolutos de funciones.* Si *f* y *g* son dos funciones, entonces podemos emplear su producto, potencias y valores absolutos:


 (fg)(x)= f(x) g(x), \; f^2 (x) = (f(x))^2, \; |f| (x) = |f(x)|.\,

Si *f* es Riemann integrable en [*a*, *b*] entonces lo mismo se cumple para |*f*|, y

\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b | f(x) | \, dx. 

Es más, si *f* y *g* son ambas Riemann integrables entonces *f* 2, *g* 2, y *fg* son también Riemann integrables, y

\left( \int_a^b (fg)(x) \, dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(x)^2 \, dx \right) \left( \int_a^b g(x)^2 \, dx \right). 

Esta desigualdad se conoce como [desigualdad de Cauchy-Schwarz](http://es.wikipedia.org/wiki/Desigualdad_de_Cauchy-Schwarz), y desempeña un papel fundamental en la teoría de los [espacios de Hilbert](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_de_Hilbert), donde el lado de la derecha se interpreta como el [producto escalar](http://es.wikipedia.org/wiki/Producto_escalar) de dos funciones integrables *f* y *g* en el intervalo [*a*, *b*].

* *Desigualdad de Hölder.* Si *p* y *q* son dos números reales, 1 ≤ *p*, *q* ≤ ∞ con 1/*p* + 1/*q* = 1, y *f* y *g* son dos funciones Riemann integrables. Entonces las funciones |*f*|*p* y |*g*|*q* también son integrables y se cumple la [desigualdad de Hölder](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Desigualdad_de_H%C3%B6lder&action=edit&redlink=1):

\left|\int f(x)g(x)\,dx\right| \leq 
\left(\int \left|f(x)\right|^p\,dx \right)^{1/p} \left(\int\left|g(x)\right|^q\,dx\right)^{1/q}.

Para el caso de *p* = *q* = 2, la desigualdad de Hölder pasa a ser la desigualdad de Cauchy–Schwarz.

* *Desigualdad de Minkowski*. Si *p* ≥ 1 es un número real y *f* y *g* son funciones Riemann integrables. Entonces |*f*|*p*, |*g*|*p* y |*f* + *g*|*p* son también Riemann integrables y se cumple la [desigualdad de Minkowski](http://es.wikipedia.org/wiki/Desigualdad_de_Minkowski):

\left(\int \left|f(x)+g(x)\right|^p\,dx \right)^{1/p} \leq 
\left(\int \left|f(x)\right|^p\,dx \right)^{1/p} + 
\left(\int \left|g(x)\right|^p\,dx \right)^{1/p}.

Una desigualdad análoga a ésta para la integral de Lebesgue se usa en la construcción de los [espacios Lp](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacios_Lp).

**Convenciones** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=14)]

En esta sección *f* es una [función](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_(matem%C3%A1ticas)) [real](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_reales) Riemann integrable. La integral

 \int_a^b f(x) \, dx 

Sobre un intervalo [*a*, *b*] está definida si *a* < *b*. Esto significa que los sumatorios superiores e inferiores de la función *f* se evalúan sobre una partición *a* = *x*0 ≤ *x*1 ≤ . . . ≤ *xn* = *b* cuyos valores *xi* son crecientes. Geométricamente significa que la integración tiene lugar "de izquierda a derecha", evaluando *f* dentro de intervalos [*x**i* , *x**i*+1] donde el intervalo con un índice más grande queda a la derecha del intervalo con un índice más pequeño. Los valores *a* y *b*, los puntos extremos del [intervalo](http://es.wikipedia.org/wiki/Intervalo_(matem%C3%A1ticas)), se denominan [límites de integración](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=L%C3%ADmites_de_integraci%C3%B3n&action=edit&redlink=1) de *f*. Las integrales también se pueden definir si *a* > *b*:

* *Inversión de los límites de integración.* si *a* > *b* entonces se define

\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx. 

Ello, con *a* = *b*, implica:

* *Integrales sobre intervalos de longitud cero.* si *a* es un [número real](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real) entonces

\int_a^a f(x) \, dx = 0. 

La primera convención es necesaria al calcular integrales sobre subintervalos de [*a*, *b*]; la segunda dice que una integral sobre un intervalo degenerado, o un [punto](http://es.wikipedia.org/wiki/Punto_(geometr%C3%ADa)), tiene que ser [cero](http://es.wikipedia.org/wiki/Cero). Un motivo para la primera convención es que la integrabilidad de *f* sobre un intervalo [*a*, *b*] implica que *f* es integrable sobre cualquier subintervalo [*c*, *d*], pero en particular las integrales tienen la propiedad de que:

* *Aditividad de la integración sobre intervalos.* si *c* es cualquier [elemento](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Elemento_(matem%C3%A1ticas)&action=edit&redlink=1) de [*a*, *b*], entonces

 \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.

Con la primera convención la relación resultante

\begin{align}
 \int_a^c f(x) \, dx &{}= \int_a^b f(x) \, dx - \int_c^b f(x) \, dx \\
 &{} = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx
\end{align}

queda bien definida para cualquier permutación cíclica de *a*, *b*, y *c*.

En lugar de ver lo anterior como convenciones, también se puede adoptar el punto de vista de que la integración se hace sólo sobre [variedades orientadas](http://es.wikipedia.org/wiki/Orientabilidad). Si *M* es una tal forma *m*-dimensional orientada, y *M'* es la misma forma con orientación opuesta y *ω* es una *m*-forma, entonces se tiene (véase más abajo la integración de formas diferenciales):

\int_M \omega = - \int_{M'} \omega \,.

**Teorema fundamental del cálculo** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=15)]

*Artículo principal:* [*Teorema fundamental del cálculo*](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_del_c%C3%A1lculo)

El *teorema fundamental del cálculo* es la afirmación de que la [derivación](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada) y la integración son operaciones inversas: si una [función continua](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_continua) primero se integra y luego se deriva, se recupera la función original. Una consecuencia importante, en ocasiones denominada el *segundo teorema fundamental del cálculo*, permite calcular integrales a base de emplear una [primitiva](http://es.wikipedia.org/wiki/Primitiva) de la función a integrar.

**Enunciado de los teoremas** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=16)]

* *Teorema fundamental del cálculo.* Sea *f* una [función](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_(matem%C3%A1ticas)) real integrable definida en un [intervalo cerrado](http://es.wikipedia.org/wiki/Intervalo_cerrado) [*a*, *b*]. Si se define *F* para cada *x* de [*a*, *b*] por

F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.

entonces *F* es [continua](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_continua) en [*a*, *b*]. Si *f* es continua en *x* de [*a*, *b*], entonces *F* es [derivable](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada) en *x*, y *F* ′(*x*) = *f*(*x*).

* *Segundo teorema fundamental del cálculo*. Sea *f* una función real, integrable definida en un intervalo cerrado [*a*, *b*]. Si *F* es una función tal que *F* ′(*x*) = *f*(*x*) para todo *x* de [*a*, *b*] (es decir, *F* es una [primitiva](http://es.wikipedia.org/wiki/Primitiva) de *f*), entonces

\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a).

* *Corolario*. Si *f* es una función continua en [*a*, *b*], entonces *f* es integrable en [*a*, *b*], y *F*, definida por

F(x) = \int_a^x f(t) \, dt

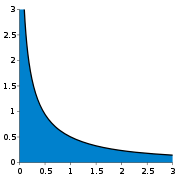
es una primitiva de *f* en [*a*, *b*]. Además,

\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a).

**Extensiones** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=17)]

**Integrales impropias** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=18)]

*Artículo principal:* [*Integral impropia*](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_impropia)

[](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Improper_integral.svg)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.5/common/images/magnify-clip.png](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Improper_integral.svg)

La [integral impropia](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_impropia)  
\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \pi  
tiene intervalos no acotados tanto en el dominio como en el recorrido.

Una integral de Riemann "propia" supone que el integrando está definido y es finito en un intervalo cerrado y acotado, cuyos extremos son los límites de integración. Una integral impropia aparece cuando una o más de estas condiciones no se satisface. En algunos casos, estas integrales se pueden definir tomando el [límite](http://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADmite) de una [sucesión](http://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_matem%C3%A1tica) de integrales de Riemann propias sobre intervalos sucesivamente más largos.

Si el intervalo no es acotado, por ejemplo en su extremo superior, entonces la integral impropia es el límite cuando el punto final tiende a infinito.

\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x)dx

Si el integrando sólo está definido en un intervalo finito semiabierto, por ejemplo (*a*,*b*], entonces, otra vez el límite puede suministrar un resultado finito.

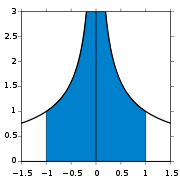
\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx

Esto es, la integral impropia es el [límite](http://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADmite) de integrales propias cuando uno de los puntos extremos del intervalo de integración se aproxima, ya sea a un [número real](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real) especificado, o ∞, o −∞. En casos más complicados, hacen falta límites en los dos puntos extremos o en puntos interiores.

Por ejemplo, la función \tfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}integrada desde 0 a ∞ (imagen de la derecha). En el extremo inferior, a medida que *x* se acerca a 0 la función tiende a ∞, y el extremo superior es él mismo ∞, a pesar de que la función tiende a 0. Así, esta es una integral doblemente impropia. Integrada, por ejemplo, desde 1 hasta 3, con un sumatorio de Riemann es suficiente para obtener un resultado de \tfrac{\pi}{6}. Para integrar desde 1 hasta ∞, un sumatorio de Riemann no es possible. Ahora bien, cualquier límite superior finito, por ejemplo *t* (con *t* > 1), da un resultado bien definido, \tfrac{\pi}{2} - 2\arctan \tfrac{1}{\sqrt{t}}. Este resultado tiene un límite finito cuando *t* tiende a infinito, que es \tfrac{\pi}{2}. De forma parecida, la integral desde 1⁄3 hasta a 1 admite también un sumatorio de Riemann, que por casualidad da de nuevo \tfrac{\pi}{6}. Sustituyendo 1⁄3 por un valor positivo arbitrario *s* (con *s* < 1) resulta igualmente un resultado definido y da -\tfrac{\pi}{2} + 2\arctan\tfrac{1}{\sqrt{s}}. Éste, también tiene un límite finito cuando *s* tiende a cero, que es \tfrac{\pi}{2}. Combinando los límites de los dos fragmentos, el resultado de esta integral impropia es

\begin{align}
 \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} &{} = \lim_{s \to 0} \int_{s}^{1} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}
   + \lim_{t \to \infty} \int_{1}^{t} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} \\
  &{} = \lim_{s \to 0} \left( - \frac{\pi}{2} + 2 \arctan\frac{1}{\sqrt{s}} \right)
   + \lim_{t \to \infty} \left( \frac{\pi}{2} - 2 \arctan\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \\
  &{} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\
  &{} = \pi .
\end{align}

Este proceso no tiene el éxito garantizado; un límite puede no existir, o puede ser infinito. Por ejemplo, sobre el intervalo cerrado de 0 a 1 la integral de \tfrac{1}{x^2}no converge; y sobre el intervalo abierto del 1 a ∞ la integral de \tfrac{1}{\sqrt{x}}no converge.

[](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Improper_integral_unbounded_internally.svg)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.5/common/images/magnify-clip.png](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Improper_integral_unbounded_internally.svg)

La [integral impropia](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_impropia)  
\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 6  
no está acotada internamente, pero ambos límites (por la derecha y por la izquierda) existen.

También puede pasar que un integrando no esté acotado en un punto interior, en este caso la integral se ha de partir en este punto, y el límite de las integrales de los dos lados han de existir y han de ser acotados. Así

\begin{align}
 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} &{} = \lim_{s \to 0} \int_{-1}^{-s} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}
   + \lim_{t \to 0} \int_{t}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \\
  &{} = \lim_{s \to 0} 3(1-\sqrt[3]{s}) + \lim_{t \to 0} 3(1-\sqrt[3]{t}) \\
  &{} = 3 + 3 \\
  &{} = 6.
\end{align}

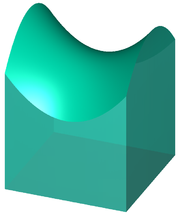
A la integral similar

 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} \,\!

no se le puede asignar un valor de esta forma, dado que las integrales por encima y por debajo de cero no convergen independientemente (en cambio, véase [valor principal de Cauchy](http://es.wikipedia.org/wiki/Valor_principal_de_Cauchy).)

**Integración múltiple** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=19)]

*Artículo principal:* [*Integral múltiple*](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_m%C3%BAltiple)

[](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Volume_under_surface.png)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.5/common/images/magnify-clip.png](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Volume_under_surface.png)

Integral doble como el volumen limitado por una superficie.

Las integrales se pueden calcular sobre regiones diferentes de los intervalos. En general, una integral sobre un [conjunto](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto) *E* de una función *f* se escribe:

\int_E f(x) \, dx.

Aquí *x* no hace falta que sea necesariamente un número real, sino que puede ser cualquier otra cantidad apropiada, por ejemplo, un [vector](http://es.wikipedia.org/wiki/Vector) de **R**3. El [teorema de Fubini](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Fubini) demuestra que estas integrales pueden reescribirse como una [**integral iterada**](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_m%C3%BAltiple). En otras palabras, la integral se puede calcular a base de integrar las coordenadas una por una.

De la misma manera que la integral definida de una función positiva representa el [área](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81rea) de la región encerrada entre la gráfica de la función y el eje *x*, la **integral doble** de una función positiva de dos variables representa el [volumen](http://es.wikipedia.org/wiki/Volumen) de la región comprendida entre la superficie definida por la función y el plano que contiene su [dominio](http://es.wikipedia.org/wiki/Dominio_(matem%C3%A1ticas)). (El mismo volumen puede obtenerse a través de una **integral triple** — la integral de la función de tres variables — de la función constante *f*(*x*, *y*, *z*) = 1 sobre la región mencionada antes entre la superficie y el plano, lo mismo se puede hacer con una integral doble para calcular una superficie.) Si el número de variables es mayor, entonces la integral representa un [hipervolumen](http://es.wikipedia.org/wiki/Hipervolumen), el volumen de un sólido de más de tres dimensiones que no se puede representar gráficamente.

Por ejemplo, el volumen del [paralelepípedo](http://es.wikipedia.org/wiki/Paralelep%C3%ADpedo) de caras 4 × 6 × 5 se puede obtener de dos maneras:

* Con la integral doble

\iint_D 5 \ dx\, dy

de la función *f*(*x*, *y*) = 5 calculada en la región *D* del plano *xy* que es la base del paralelepípedo.

* Con la integral triple

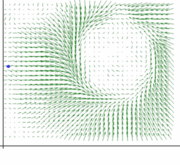
\iiint_\mathrm{paralelepipedo} 1 \, dx\, dy\, dz

de la función constante 1 calculada sobre el mismo paralelepípedo (a pesar de que este segundo método también se puede interpretar como el hipervolumen de un hiperparalelepípedo de cuatro dimensiones que tiene como base el paralelepípedo en cuestión y una altura constante de 1, como la altura es 1 el volumen coincide con el área de la base).

Puesto que es imposible calcular la antiderivada de una función de más de una variable, no existen las integrales múltiples indefinidas: tales integrales son todas definidas.

**Integrales de línea** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=20)]

*Artículo principal:* [*Integral de línea*](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_de_l%C3%ADnea)

[](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Line-Integral.gif)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.5/common/images/magnify-clip.png](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Line-Integral.gif)

Una integral de línea acumula elementos a lo largo de una curva.

El concepto de integral se puede extender a dominios de integración más generales, tales como las líneas curvas y las superficies. Estas integrales se conocen como integrales de línea e integrales de superficie respectivamente. Tienen importantes aplicaciones en la física cuando se trata con [campos vectoriales](http://es.wikipedia.org/wiki/Campo_vectorial).

Una *integral de línea* es una integral donde la [función](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_(matem%C3%A1ticas)) a integrar es evaluada a lo largo de una [curva](http://es.wikipedia.org/wiki/Curva). Se utilizan varias integrales curvilíneas diferentes. En el caso de una curva cerrada también se la denomina **integral de contorno**.

La función a integrar puede ser un [campo escalar](http://es.wikipedia.org/wiki/Campo_escalar) o un [campo vectorial](http://es.wikipedia.org/wiki/Campo_vectorial). El valor de la integral curvilínea es la suma de los valores del campo en los puntos de la línea, ponderados por alguna función escalar de la curva (habitualmente la [longitud del arco](http://es.wikipedia.org/wiki/Longitud_de_arco) o, en el caso de un campo vectorial, el [producto escalar](http://es.wikipedia.org/wiki/Producto_escalar) del campo vectorial por un vector diferencial de la curva). Esta ponderación distingue las integrales curvilíneas de las integrales más sencillas definidas sobre [intervalos](http://es.wikipedia.org/wiki/Intervalo_(matem%C3%A1ticas)).

Muchas fórmulas sencillas de la física tienen de forma natural análogas continuas en términos de integrales de línea; por ejemplo, el hecho de que el [trabajo](http://es.wikipedia.org/wiki/Trabajo_mec%C3%A1nico) sea igual a la [fuerza](http://es.wikipedia.org/wiki/Fuerza) multiplicada por la distancia se puede expresar (en términos de cantidades vectoriales) como:

W=\vec F\cdot\vec d

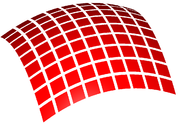
que tiene su paralelismo en la integral de línea

W=\int_C \vec F\cdot d\vec s

que acumula los componentes vectoriales a lo largo de un camino continuo, y así calcula el trabajo realizado por un objeto al moverse a través de un campo, como por ejemplo un campo eléctrico o un campo gravitatorio.

**Integrales de superficie** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=21)]

*Artículo principal:* [*Integral de superficie*](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_de_superficie)

[](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Surface_integral_illustration.png)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.5/common/images/magnify-clip.png](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Surface_integral_illustration.png)

La definición de las integrales de superficie descansa en la división de la superficie en pequeños elementos de superficie.

Una **integral de superficie** es una [integral definida](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_definida) calculada sobre una [superficie](http://es.wikipedia.org/wiki/Superficie_(matem%C3%A1tica)) (que puede ser un [conjunto](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto) curvado en el [espacio](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio); se puede entender como la [integral doble](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_doble) análoga a la [integral de línea](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_de_l%C3%ADnea). La función a integrar puede ser un [campo escalar](http://es.wikipedia.org/wiki/Campo_escalar) o un [campo vectorial](http://es.wikipedia.org/wiki/Campo_vectorial). El valor de la integral de superficie es la suma ponderada de los valores del campo en todos los puntos de la superficie. Esto se puede conseguir a base de dividir la superficie en elementos de superficie, los cuales proporcionan la partición para los sumatorios de Riemann.

Como ejemplo de las aplicaciones de las integrales de superficie, se puede considerar un campo vectorial **v** sobre una superficie *S*; es decir, para cada punto **x** de *S*, **v**(**x**) es un vector. Imagínese que se tiene un fluido fluyendo a través de *S*, de forma que **v**(**x**) determina la velocidad del fluido en el punto **x**. El [caudal](http://es.wikipedia.org/wiki/Caudal) se define como la cantidad de fluido que fluye a través de *S* en la unidad de tiempo. Para hallar el caudal, hay que calcular el [producto escalar](http://es.wikipedia.org/wiki/Producto_escalar) de **v** por el vector unitario [normal a la superficie](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Normal_a_una_superficie&action=edit&redlink=1) *S* en cada punto, lo que nos dará un campo escalar, que integramos sobre la superficie:

\int_S {\mathbf v}\cdot \,d{\mathbf {S}}.

El caudal de fluido de este ejemplo puede ser de un fluido físico como el agua o el aire, o de un [flujo](http://es.wikipedia.org/wiki/Flujo) eléctrico o magnético. Así, las integrales de superficie tienen aplicaciones en la [física](http://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%ADsica), en particular en la [teoría clásica](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Teor%C3%ADa_cl%C3%A1sica&action=edit&redlink=1) del [electromagnetismo](http://es.wikipedia.org/wiki/Electromagnetismo).

**Integrales de formas diferenciales** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=22)]

*Artículo principal:* [*Forma diferencial*](http://es.wikipedia.org/wiki/Forma_diferencial)

Una [forma diferencial](http://es.wikipedia.org/wiki/Forma_diferencial) es un concepto matemático en los campos del [cálculo multivariable](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=C%C3%A1lculo_multivariable&action=edit&redlink=1), [topología diferencial](http://es.wikipedia.org/wiki/Topolog%C3%ADa_diferencial) y [tensores](http://es.wikipedia.org/wiki/Tensor). La notación moderna de las formas diferenciales, así como la idea de las formas diferenciales como el [producto exterior](http://es.wikipedia.org/wiki/Producto_exterior) de [derivadas exteriores](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada_exterior) formando un [álgebra exterior](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_exterior), fue presentada por [Élie Cartan](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%89lie_Cartan).

Se empieza trabajando en un [conjunto abierto](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_abierto) de **R***n*. Una 0-forma se define como una [función infinitamente derivable](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Funci%C3%B3n_infinitamente_derivable&action=edit&redlink=1) *f*. Cuando se integra una [función](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_(matem%C3%A1ticas)) *f* sobre un subespacio de *m*-[dimensional](http://es.wikipedia.org/wiki/Dimensi%C3%B3n) *S* de **R***n*, se escribe como

\int_S f\,dx^1 \cdots dx^m.

(Los superíndices no son exponentes.) Se puede considerar que *dx*1 hasta *dxn* son objetos formales ellos mismos, más que etiquetas añadidas para hacer que la integral se asemeje a los sumatorios de [Riemann](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Sumatorio_de_Riemann&action=edit&redlink=1). De forma alternativa se pueden ver como [covectores](http://es.wikipedia.org/wiki/Covector), y por lo tanto como una [medida](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Medida_(matem%C3%A1ticas)&action=edit&redlink=1) de la "densidad" (integrable en un sentido general). A *dx*1, …,*dxn* se las denomina [1-formas](http://es.wikipedia.org/wiki/1-forma) *básicas*.

Se define el conjunto de todos estos productos como las 2-*formas* *básicas*, y de forma similar se define el conjunto de los productos de la forma *dxa*∧*dxb*∧*dxc* como las 3-*formas* *básicas*. Una *k*-forma general es por lo tanto una suma ponderada de *k-*formas básicas, donde los pesos son las funciones infinitamente derivables *f*. Todas juntas forman un [espacio vectorial](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_vectorial), siendo las *k*-formas básicas los vectores base, y las 0-formas (funciones infinitamente derivables) el campo de escalares. El producto exterior se extiende a las *k*-formas de la forma natural. Sobre **R***n* como máximo *n* covectores pueden ser linealmente independientes, y así una *k-*forma con *k* > *n* será siempre cero por la propiedad alternante.

Además del producto exterior, también existe el operador [derivada exterior](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada_exterior) **d**. Este operador hace corresponder a las *k*-formas (*k*+1)-formas. Para una *k*-forma ω = *f* *dxa* sobre **R***n*, se define la acción de **d** por:

{\bold d}{\omega} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^a.

con extensión a las *k*-formas generales que se dan linealmente.

Este planteamiento más general permite un enfoque de la integración sobre [variedades](http://es.wikipedia.org/wiki/Variedad_diferenciable) libre de coordenadas. También permite una generalización natural del [teorema fundamental del cálculo](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_del_c%C3%A1lculo), denominada [teorema de Stokes](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Stokes), que se puede establecer como

\int_{\Omega} {\bold d}\omega = \int_{\partial\Omega} \omega \,\!

donde ω es una *k*-forma general, y ∂Ω indica la [frontera](http://es.wikipedia.org/wiki/Frontera_(topolog%C3%ADa)) de la región Ω. Así en el supuesto de que ω sea una 0-forma y Ω sea un intervalo cerrado de la recta real, el teorema de Stokes se reduce al [teorema fundamental del cálculo](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_del_c%C3%A1lculo). En el caso de que ω sea una 1-forma y Ω sea una región de dimensión 2 en el plano, el teorema se reduce al [teorema de Green](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Green). De manera similar, empleando 2-formas, 3-formas y la [dualidad de Hodge](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Dualidad_de_Hodge&action=edit&redlink=1), se puede llegar al [teorema de Stokes](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Stokes) y al [teorema de la divergencia](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_la_divergencia). De esta forma puede verse que las formas diferenciales suministran una potente visión unificadora de la integración.

**Métodos y aplicaciones** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=23)]

**Cálculo de integrales** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=24)]

*Artículo principal:* [*Métodos de integración*](http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todos_de_integraci%C3%B3n)

La técnica más básica para calcular integrales de una variable real se basa en el [teorema fundamental del cálculo](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_del_c%C3%A1lculo). Se procede de la siguiente forma:

1. Se escoge una función *f*(*x*) y un intervalo [*a*, *b*].
2. Se halla una primitiva de *f*, es decir, una función *F* tal que *F'* = *f*.
3. Se emplea el teorema fundamental del cálculo, suponiendo que ni el integrando ni la integral tienen [singularidades](http://es.wikipedia.org/wiki/Singularidad_matem%C3%A1tica) en el camino de integración,

\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).

1. Por tanto, el valor de la integral es *F*(*b*) − *F*(*a*).

Nótese que la integral no es realmente la primitiva, sino que el teorema fundamental permite emplear las primitivas para evaluar las integrales definidas.

A menudo, el paso difícil de este proceso es el de encontrar una primitiva de *f*. En raras ocasiones es posible echar un vistazo a una función y escribir directamente su primitiva. Muy a menudo, es necesario emplear una de las muchas técnicas que se han desarrollado para evaluar integrales. La mayoría de ellas transforman una integral en otra que se espera que sea más manejable. Entre estas técnicas destacan:

* [Integración por cambio de variable](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n_por_cambio_de_variable)
* [Integración por partes](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n_por_partes)
* [Integración por sustitución trigonométrica](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n_por_sustituci%C3%B3n_trigonom%C3%A9trica)
* [Integración de fracciones parciales](http://es.wikipedia.org/wiki/Fracci%C3%B3n_parcial)

Incluso si estas técnicas fallan, aún puede ser posible evaluar una integral dada. La siguiente técnica más común es el [cálculo del residuo](http://es.wikipedia.org/wiki/Residuo_(an%C3%A1lisis_complejo)), mientras que la [serie de Taylor](http://es.wikipedia.org/wiki/Serie_de_Taylor) a veces se puede usar para hallar la primitiva de las [integrales no elementales](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integral_no_elemental&action=edit&redlink=1) en lo que se conoce como el método de [integración por series](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n_por_series&action=edit&redlink=1). También hay muchas formas menos habituales para calcular integrales definidas; por ejemplo, se puede emplear la [identidad de Parseval](http://es.wikipedia.org/wiki/Identidad_de_Parseval) para transformar una integral sobre una región rectangular en una suma infinita. En algunas ocasiones, se puede evaluar una integral empleando un truco; un ejemplo de este tipo se puede ver en la [integral de Gauss](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_de_Gauss).

Los cálculos de volúmenes de [sólidos de revolución](http://es.wikipedia.org/wiki/S%C3%B3lido_de_revoluci%C3%B3n) se pueden hacer normalmente con la [integración por discos](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n_por_discos&action=edit&redlink=1) o la [integración por capas](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n_por_capas&action=edit&redlink=1).

Los resultados específicos que se han encontrado empleando las diferentes técnicas se recogen en la [tabla de integrales](http://es.wikipedia.org/wiki/Tabla_de_integrales).

**Algoritmos simbólicos** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=25)]

*Artículo principal:* [*Integración simbólica*](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n_simb%C3%B3lica&action=edit&redlink=1)

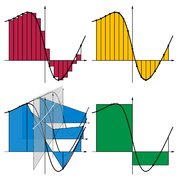
En muchos problemas de matemáticas, física, e ingeniería en los que participa la integración es deseable tener una fórmula explícita para la integral. Con esta finalidad, a lo largo de los años se han ido publicando extensas [tablas de integrales](http://es.wikipedia.org/wiki/Tabla_de_integrales). Con el desarrollo de los [ordenadores](http://es.wikipedia.org/wiki/Ordenador), muchos profesionales, educadores y estudiantes han recurrido a los [sistemas de cálculo algebraico por ordenador](http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_algebraico_computacional), que han sido diseñados específicamente para desarrollar tareas tediosas o difíciles, entre las cuales se encuentra la integración. La integración simbólica presenta un reto especial en el desarrollo de este tipo de sistemas.

Una dificultad matemática importante de la integración simbólica es que, en muchos casos, no existe ninguna fórmula cerrada para la primitiva de una función aparentemente inocente. Por ejemplo, se sabe que las primitivas de las funciones *exp* ( *x*2), *xx* y sen *x* /*x* no se pueden expresar con una fórmula cerrada en las que participen sólo [funciones racionales](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_racional), [exponenciales](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_exponencial), [logarítmicas](http://es.wikipedia.org/wiki/Logaritmo), [trigonométricas](http://es.wikipedia.org/wiki/Funciones_trigonom%C3%A9tricas), [inversas de las funciones trigonométricas](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Inversas_de_las_funciones_trigonom%C3%A9tricas&action=edit&redlink=1), y las operaciones de suma, multiplicación y composición. En otras palabras, ninguna de estas tres funciones dadas es integrable con [funciones elementales](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_elemental). La [teoría de Galois diferencial](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Teor%C3%ADa_de_Galois_diferencial&action=edit&redlink=1) proporciona criterios generales para determinar cuándo la primitiva de una función elemental es a su vez elemental. Por desgracia, resulta que las funciones con expresiones cerradas para sus primitivas son la excepción en vez de ser la regla. En consecuencia, los sistemas de cálculo algebraico por ordenador, no pueden tener la seguridad de poder encontrar una primitiva para una función elemental cualquiera construida de forma aleatoria. En el lado positivo, si se fijan de antemano los "bloques constructivos" de las primitivas, aún es posible decidir si se puede expresar la primitiva de una función dada empleando estos bloques y las operaciones de multiplicación y composición, y hallar la respuesta simbólica en el caso de que exista. El [algoritmo de Risch](http://es.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_de_Risch), implementado en [Mathematica](http://es.wikipedia.org/wiki/Mathematica) y en otros [sistemas de cálculo algebraico por ordenador](http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_algebraico_computacional), hacen precisamente esto para funciones y primitivas construidas a partir de fracciones racionales, [radicales](http://es.wikipedia.org/wiki/Ra%C3%ADz_de_una_funci%C3%B3n), logaritmos y funciones exponenciales.

Algunos integrandos aparecen con la suficiente frecuencia como para merecer un estudio especial. En particular, puede ser útil tener, en el conjunto de las primitivas, las [funciones especiales](http://es.wikipedia.org/wiki/Funciones_especiales) de la [física](http://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%ADsica) (como las [funciones de Legendre](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Funciones_de_Legendre&action=edit&redlink=1), la [función hipergeométrica](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_hipergeom%C3%A9trica), la [función gamma](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_gamma), etcétera). Es posible extender el algoritmo de Risch-Norman de forma que abarque estas funciones, pero se trata de todo un reto.

La mayoría de los humanos no son capaces de integrar estas fórmulas generales, por lo que en cierto sentido los ordenadores son más hábiles integrando fórmulas muy complicadas. Es poco probable que las fórmulas muy complejas tengan primitivas de forma cerrada, de modo que hasta qué punto esto es una ventaja es una cuestión filosófica abierta a debate.

**Cuadratura numérica** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=26)]

[](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Numerical_quadrature_4up.png)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.5/common/images/magnify-clip.png](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Numerical_quadrature_4up.png)

Métodos numéricos de cuadratura: ■ Rectángulo, ■ Trapezoide, ■ Romberg, ■ Gauss.

*Artículo principal:* [*Integración numérica*](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n_num%C3%A9rica)

Las integrales que se encuentran en los cursos básicos de cálculo han sido elegidas deliberadamente por su simplicidad, pero las que se encuentran en las aplicaciones reales no siempre son tan asequibles. Algunas integrales no se pueden hallar con exactitud, otras necesitan de funciones especiales que son muy complicadas de calcular, y otras son tan complejas que encontrar la respuesta exacta es demasiado lento. Esto motiva el estudio y la aplicación de métodos numéricos para aproximar integrales. Hoy en día se usan en la aritmética de [coma flotante](http://es.wikipedia.org/wiki/Coma_flotante), en [ordenadores](http://es.wikipedia.org/wiki/Ordenador) electrónicos. Para los cálculos a mano surgieron muchas ideas mucho antes; pero la velocidad de los ordenadores de uso general como el [ENIAC](http://es.wikipedia.org/wiki/ENIAC) crearon la necesidad de mejoras.

Los objetivos de la integración numérica son la exactitud, la fiabilidad, la eficiencia y la generalidad. Por ejemplo, la integral

\int_{-2}^{2} \tfrac15 \left( \tfrac{1}{100}(322 + 3 x (98 + x (37 + x))) - 24 \frac{x}{1+x^2} \right) dx

que tiene el valor exacto de (en la práctica ordinaria no se conoce de antemano la respuesta, por lo que una tarea importante — que no se explora aquí — es decidir en qué momento una aproximación ya es bastante buena.) Un enfoque de "libro de cálculo" divide el intervalo de integración en, por ejemplo, 16 trozos iguales, y calcula los valores de la función.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Valores de la función en los puntos | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ***x*** | −2,00 | | −1,50 | | −1,00 | | −0,50 | | 0,00 | | 0,50 | | 1,00 | | 1,50 | | 2,00 | |
| ***f*(*x*)** | 2,22800 | | 2,45663 | | 2,67200 | | 2,32475 | | 0,64400 | | −0,92575 | | −0,94000 | | −0,16963 | | 0,83600 | |
| ***x*** |  | −1.75 | | −1,25 | | −0,75 | | −0,25 | | 0,25 | | 0,75 | | 1,25 | | 1.75 | |  |
| ***f*(*x*)** |  | 2,33041 | | 2,58562 | | 2,62934 | | 1,64019 | | −0,32444 | | −1,09159 | | −0,60387 | | 0,31734 | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Referencias y notas** [[editar](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n&action=edit&section=27)]

1. [↑](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_ref-0) En el caso de las funciones a las que se aplica la definición de Riemann, los resultados coinciden
2. [↑](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_ref-1) Burton, David M. (2005). *The History of Mathematics: An Introduction* (6ª ed.), McGraw-Hill, p. 359, [ISBN 978-0-07-305189-5](http://es.wikipedia.org/wiki/Especial:FuentesDeLibros/9780073051895)
3. [↑](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_ref-2) Leibniz, Gottfried Wilhelm (1899) (Gerhardt, Karl Immanuel, ed.). *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern*. Erster Band, Berlin: Mayer & Müller, p. 154
4. [↑](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_ref-3) Cajori, Florian (1929). *A History Of Mathematical Notations*, Vol. II, Open Court Publishing, pp. 247–252, [ISBN 978-0-486-67766-8](http://es.wikipedia.org/wiki/Especial:FuentesDeLibros/9780486677668)
5. [↑](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_ref-4) Fourier, Jean Baptiste Joseph (1822). *Théorie analytique de la chaleur*, Chez Firmin Didot, père et fils, p. §231, [[1]](http://books.google.com/books?id=TDQJAAAAIAAJ)
6. [↑](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_ref-5) W3C (2006). *Arabic mathematical notation* [[2]](http://www.w3.org/TR/arabic-math/)
7. [↑](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_ref-6) Rudin, Walter (1987). "Chapter 1: Abstract Integration", Real and Complex Analysis (International ed.), McGraw-Hill, [ISBN 978-0-07-100276-9](http://es.wikipedia.org/wiki/Especial:FuentesDeLibros/9780071002769)
8. [↑](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_ref-7) Folland, Gerald B. (1984). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* (1ª ed.), John Wiley & Sons, [ISBN 978-0-471-80958-6](http://es.wikipedia.org/wiki/Especial:FuentesDeLibros/9780471809586)
9. [↑](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_ref-8) Bourbaki, Nicolas (2004). *Integration I*, Springer Verlag, [ISBN 3-540-41129-1](http://es.wikipedia.org/wiki/Especial:FuentesDeLibros/3540411291). En particular, los capítulos III y IV.
10. [↑](http://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n#cite_ref-9) Hildebrandt, T. H. (1953). "Integration in abstract spaces", *Bulletin of the American Mathematical Society* 59(2): 111–139, ISSN 0273-0979 [[3]](http://www.worldcat.org/issn/0273-0979)