

CEFOP-ASA	DEVOIR DE CONGES DE DETENTE	A/S 2023- 2024
Mr DJAHOU Franck	EPREUVE DE MATHEMATIQUES	Durée : 3H30 ; Coef : 3
Tél :92 10 86 37		Classe : Tle D

EXERCICE 1 (4pts)

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 2e^{x+1}$

- Vérifier que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^2 e^{x+1}$ est une solution de l'équation différentielle (E)
- Démontrer qu'une fonction h deux fois dérivable sur \mathbb{R} est solution de (E) si seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' - 2y' + y = 0$
 - Résoudre l'équation différentielle (E')
 - En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E)
 - Trouve la solution de (E) vérifiant les conditions $h(0) = e$ et $h'(0) = -2e$

EXERCICE 2 (5pts)

Soit le complexe $a = -1 - i$ et (Z_n) la suite définie par

$$\begin{cases} Z_0 = 0 \text{ et } Z_1 = i \\ Z_{n+1} = (1 - a)Z_n + aZ_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- Déterminer Z_2 et Z_3 sous forme algébrique.
- Soit (U_n) la suite définie par $U_n = Z_{n+1} - Z_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
 - Déterminer U_0 et U_1 sous forme algébrique.
 - Démontrer que (U_n) est géométrique de raison $-a$.
 - Exprimer U_n en fonction de n et a .
- Soit $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$. Exprimer S_n en fonction de Z_n .
En déduire que $Z_n = -1 + (1 + i)^n$.
- Déterminer le module et un argument de a
 - Donner la forme algébrique Z_{19}
- Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on désigne par A_0 le point d'affixe Z_0 ; A_1 le point d'affixe Z_1 et A_2 le point d'affixe Z_2 .

Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude direct S qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2

PROBLEME : (11pts)

- Le plan P est d'un repère orthonormal (o, i, j) unité graphique 2 cm.

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}, \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2 \ln(x) - x^2, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

PARTIE A (6,5pts)

- Déterminer l'ensemble de définition de f
 - Etudier la continuité de f en 0.
 - Etudier la dérivabilité de f en 0, puis interpréter graphiquement le résultat.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat.
- Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = e^x + x + 1$.
 - Calculer $g'(x)$ et en déduire le sens de variation de g .
 - Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

- c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule α et que $-1,28 < \alpha < -1,27$. En déduire le signe de $g(x)$
4. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 5.a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty; 0]$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f sur $]-\infty; 0]$
- b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$. En déduire le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
- c) Dresser le tableau de variation f .
6. Construire les demi-tangentes à l'origine puis la courbe (c).

PARTIE B (2,5pts)

On considère la suite (J_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$ par $J_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$.

- 1) Donner une interprétation géométrique de J_n
- 2) a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $f(n) \leq J_n$
b) Démontrer que la suite (J_n) est divergente.

3) Calculer l'aire A en cm^2 du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

PARTIE C (2pts)

On considère un point mobile M dont les coordonnées sont données en fonction du paramètre t

par :
$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{2t}(t-1)t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- 1) Montrer que la trajectoire de M est une partie de (C) que l'on précisera. Tracer en pointillés la trajectoire de M, on la notera (C')
- 2) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse et accélération à l'instant $t = \frac{\pi}{4}$

Bonus (1pt)

- 1) A et B sont deux parties de l'ensemble E, on a :
Card $(A \cup B) = \dots\dots\dots$
- 2) La formule de la covariance de la série statistique double (x, y) est :
Cov $(x, y) = \dots\dots\dots$

*« Le secret des plus forts c'est l'effort, l'échec reste le fruit de la paresse »
DJAHOU Franck*