

Question : Soit A un anneau commutatif non nul. On a :

- A** : Il existe un élément non nul inversible dans A . \otimes
B : Tout élément non nul est régulier pour la multiplication. \sqcup
C : Si $\forall a \in A^*$, a est régulier pour la multiplication, A est intègre. \otimes
D : Si $a \in A^*$, a est régulier pour la multiplication, a est inversible. \sqcup

Question : On considère l'anneau $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. On a :

- A** : $2\mathbf{Z}$ est un idéal de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. \sqcup
B : $12\mathbf{Z}$ est un idéal de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. \sqcup
C : $2\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ est un idéal de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. \otimes
D : $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ est un idéal de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. \sqcup
E : $2\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ est un idéal de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. \sqcup

Question : On pose $A = \mathbf{R}[X]$. Alors on a :

- A** : $A[Y]$ n'est pas un anneau intègre. \sqcup
B : $A[Y]$ est un anneau principal. \sqcup
C : $Y^2 + 1$ est irréductible dans $A[Y]$. \otimes
D : $Y^2 - 2$ est irréductible dans $A[Y]$. \sqcup

Question : Soit A un anneau fini principal. On a :

- A** : $A[X]$ n'est pas principal. \sqcup
B : Si $P \in A[X]$ est irréductible, $A[X]/(P)$ est un corps. \otimes
C : La caractéristique de A est nulle. \sqcup
D : Tout idéal de $A[X]$ premier est maximal. \sqcup
E : Si $P \in A[X]$ est premier, (P) est maximal. \otimes

Question : Soit A un anneau commutatif intègre, I un idéal de A . On a :

- A** : Si A/I est un anneau principal, alors A est principal. \sqcup
B : Si I est un idéal premier de A et A principal, alors A/I est principal. \otimes
C : Soit B un anneau commutatif, $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux surjectif. Si A est principal, B est principal. \sqcup
D : Soit A un anneau principal, P un polynôme irréductible de $A[X]$. L'idéal (P) est un idéal maximal de $A[X]$. \sqcup

Question : Soit I un idéal de \mathbf{Z} , $I\mathbf{Z}[X]$ l'idéal de $\mathbf{Z}[X]$ engendré par I . On considère l'homomorphisme surjectif $\varphi : \mathbf{Z}[X] \rightarrow (\mathbf{Z}/I)[X]$ défini par $\varphi(a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n) = (a_0 + I) + (a_1 + I)X + \dots + (a_n + I)X^n$. On a :

- A** : $\ker(\varphi)$ est un idéal maximal de $\mathbf{Z}[X]$. \sqcup
B : $I\mathbf{Z}[X] = \{aX | a \in I\}$. \sqcup
C : Si $I = 3\mathbf{Z}$, $\ker(\varphi)$ est un idéal premier de $\mathbf{Z}[X]$. \otimes
D : L'idéal $(3, 3X)$ est un idéal maximal de $\mathbf{Z}[X]$. \sqcup

Question : Soit $f : \mathbf{C}[X, Y] \rightarrow \mathbf{C}[X]$ l'application définie par

- $f(P(X, Y)) = P(X, X^2)$. f est un homomorphisme surjectif. On a :
A : On peut faire la division euclidienne de P par $Y - X^2$ dans $\mathbf{C}[X][Y]$. \otimes
B : $\ker(f)$ est un idéal maximal de $\mathbf{C}[X, Y]$. \sqcup
C : $Y - X^2$ n'est pas irréductible dans $\mathbf{C}[X, Y]$. \sqcup
D : $\mathbf{C}[X, Y]/(Y - X^2) \simeq \mathbf{C}$. \sqcup
E : L'anneau $\mathbf{C}[X, Y]/(Y - X^2)$ est principal. \otimes